奕闻 yweven

一、泰勒公式与麦克劳林公式

泰勒中值定理 1

设 $f(x)$ 在 x_0 处具有直到 n 阶的导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=o\left[(x-x_0)^n\right]\ (x\to x_0)$ 称为皮亚诺（Peano）余项. 该展开式称为 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 邻域的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

2. 泰勒展开的唯一性：一个函数在同一点 x_0 处的 n 阶带佩亚诺余项的**泰勒展开**（I）是唯一的，即：设函数 $f(x)$ 有连续的 n 阶导数，在 $x=x_0$ 处有展开式

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+R_n(x),$$

而且余项 $R_n(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$，

则必有 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!},k\in\mathbf{N}$，其中 $f^{(0)}(x)\equiv f(x)$.

3. 麦克劳林公式：泰勒公式中，当 $x_0=0$ 时，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

此公式称为 n 阶带佩亚诺余项的**麦克劳林公式**.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),\ (\mathrm{I})$$

其中，$R_n(x)=o\left[(x-x_0)^n\right],(x\to x_0)$.

常用泰勒(麦克劳林)公式：$x\to 0$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\qquad \arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\qquad \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\qquad (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$$

奕闻 yweven

泰勒中值定理 2

二、泰勒中值定理&拉格朗日余项

1. 泰勒中值定理：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点某个开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶的导数，则对任一 $x\in(a,b)$，$f(x)$ 可表示为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{ 介于 }x\text{ 和 }x_0\text{ 之间}).$$

称为**拉格朗日余项**.

2. 将带拉格朗日余项的泰勒公式

设 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶的导数，在区间 $[a,b]$ 上有 n 阶连续导数，则对任意 $x\in[a,b]$ 时有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$ 在 x_0 与 x 之间）称为拉格朗日余项.

该展开式称为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上带拉格朗日余项的 n **阶泰勒公式**.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$